浙江农林大学 2023 年新生杯程序设计竞赛

2023 年 12 月 24 日

消失的...？

- 很容易求得包含没有出现的数在内的所有 n 个数的和，只需要将 $n-1$ 个数求和，然后作差即可找到没有出现的数。

琪露诺的算数教室

- 通过判断运算符是什么来选择对应的计算。
- 注意 `+-*` 需要判断结果是否超出 0 到 9 的范围，
- 而 `/` 需要判断结果是否为整数以及除数是否为 0。

鬼人正邪的算术教室

- 本题可以通过将所有正的（应当加上的）数中的 9 先当成 6，所有负的（应当减去的）数中 6 先当成 9，并记录每一个十进制位上 6 和 9 的数量。
- 这样一来可以获得一个能够通过一定的逆转来得到的最小答案，将这个答案和输入中的目标答案对比，比较差值能否用那些十进制位上的差值 3 来补足，如果可以则能够满足结果等于，如果不能或不是 3 的倍数，则结果不等于。

鬼人正邪的算术教室

- 如果没能想到先取得最大或最小的可能结果，也可以通过线性 dp 来判断。
- 由于我们将数据中 6 和 9 的数量限制在 10 以内，这就是说使用状态压缩或 dfs 枚举所有可能的结果也能通过本题。

决斗

- 看起来像是人畜无害的模拟题。
- 但事实上如果输入中两个人的牌组有大量的相同大小牌，或存在一定关系导致相互能够轮流互相赢走对方的不少牌，时间复杂度就能达到 $O(n^2)$ 甚至更高，因此模拟会 T。
- 可以参考下面的例子：

玩家 A：3 2 2 2 2
玩家 B：2 2 2 2 2

决斗

- 仔细观察容易发现，如果双方牌组中最大的牌大小相等，那么双方都不可能赢完对方的牌。
- 由于题目保证有获胜者，那么双方牌组中最大的牌一定不同。
- 那么拥有全局最大的牌的人是否一定赢呢？容易发现，即使另一方拥有次大的牌更多，一开始有全局最大牌的一方可能显劣势，但总会遇到最大的牌和次大的牌对比的回合，使得有全局最大牌的一方逐渐赢得次大牌，从而最终获胜。
- 所以拥有全局最大牌的一方一定获胜，不存在一种情况使得最大牌大小不等的对局中平局。因此只需要比较牌组中最大牌的大小即可得到答案。

决斗

- 虽然题目保证有赢家是为了骗选手少动点脑写一次模拟，但同时这也导致，即使你没能成功证明上述结论，你依然很容易发现，最大牌更大的一方一定不会失败。
- 而你可能认为最大牌不等的情况中有平局的数据被去除了，因此依然可以使用这个结论来解题。

Ryanzi 的隐身技能

- 经典 dp 题。
- 首先，我们可以定义一个一维的状态数组 $f[n+1]$, 为了方便计算我们可以在读取每天修炼隐身值 $a[i]$ 时从下标 1 开始。
- $f[i]$ 表示从开始到第 i 天时 Ryanzi 可以得到的最大的隐身值。

Ryanzi 的隐身技能

- 接下来对第 i 天进行状态分析。
- 不修炼，则当天的隐身值等于前一天的隐身值：$f[i-1]$;
- 修炼，则需要保证前一天没有修炼，即两天前的隐身值加上当天修炼能获得的隐身值：$f[i-2]+a[i]$。
- 对这两个结果求一个最大值，就是当天能得到的最大隐身值。
- 由此可以得到转移方程：$f[i]=max(f[i-1],f[i-2]+a[i])$。

想要成为《WWS》高手

- 不难发现，通过对数个相邻单位进行操作可以实现对排列内任意两个单位进行阵营反转。
- 当所属敌方阵营的战舰数量为偶数时，可全变为己方阵营所属。此时，ArcticBa 不战而胜，且剩余生命值最大值为排列内所有战舰的生命值之和。
- 当所属敌方阵营的战舰数量为奇数时，可以通过上述操作使得最后场上有且只有一艘敌方阵营战舰。此时要使剩余生命值之和达到最大，只需要使唯一一艘敌方战舰的生命值与火力值之和最小。若最大剩余生命值不为正数，则输掉这局比赛，反之则赢得比赛。

Texcavtor 与早八

- 在本题中，我们需要利用 n 个数字排列组合成 n 位数。
- 在所有的 n 位数中，每个数字在每一位上出现的次数都是 A_{n-1}^{n-1}，所以 x 可以表示为：$\sum_{k=i}^{i+n-1} \sum_{q=0}^{n-1} k \times 10^q$。
- 由乘法分配律，上式可化简为：$\sum_{k=i}^{i+b-1} k \times \sum_{q=0}^{n-1} 10^q$。
- 枚举 $1-9$ 之间所有的数作为 i，如果能找到满足条件的 i，输出以 i 开始的 n 个数，如果找不到，输出 -1。

异或

- 经典异或前缀和板子题，直接对每次询问一一求异或会 T。
- 举个简单的前缀和例子：令 $f[i]$ 为下标从 1 到 i 的所有数的和，那么区间 $[l, r]$ 所有数的和就是 $f[r] - f[l-1]$。
- 异或同理，在前缀和中，加法和减法互为逆运算，而对于异或，它和自己互为逆运算。
- 若 $f[i]$ 为下标从 1 到 i 的所有数的异或和，那么区间 $[l, r]$ 所有数的异或和就是 $f[r] \oplus f[l-1]$。

区间 MEX

- 可以二分 mex 的最大值 x 是多少，每次用二分的最大值 x 对原数组扫一遍即可。
- 扫描时看对应区间内 $0 \sim x-1$ 中的数是否都出现了，这可以用桶来判断。复杂度 $O(n \log n)$。
- 此题还可以线性 $O(n)$ 求解，直接对原数组扫一遍即可，设当前扫描到的 mex 最大值为 x，那么只有当 $0 \sim x-1$ 中的值都出现了才尝试更新 x，这同样可以用桶记录解决。
- 此外，题目中有比较大的数，但桶开不了那么大，可以将这些数对 $n+1$ 取最小值，因为答案最大只可能为 n。
- ps: 本题为 2023 年 5 月校赛废案（

虚空卡比兽

- 经典走二维迷宫，但是和传统迷宫有两点区别：第一是不能原地掉头，第二是需要按一定顺序先后走到两个终点。
- 第二点基于第一点存在，因为如果没有第一点对行动逻辑的限制，第二点就只不过是看看两点和起点是否在同一个连通块。
- 原地掉头可以在搜索时，每一步都记录是通过哪个方向进入的。
- 既然不能原地掉头，这也就意味着掉头必须通过一个环来绕个圈掉头，这点已经在样例中给出。

虚空卡比兽

- 1 和 2 必须在同一个连通块内，否则一定不能成功。
- 如果同一个连通块内，就存在两种情况。
- 第一种是先通过 1 再通过 2，这种情况可以直接离开迷宫；
- 第二种是先通过 2 再通过 1，这种情况则需要使经过 1 之后能够遇到一个环来掉头。
- 容易证明，即使不能原地掉头，只要掉头（进入已经标记过的连通块区域）之后就可以回到连通块内之前标记的任何地方，因此只要先遇到 2 再遇到 1 再遇到任意一个环，也可以成功离开迷宫。

虚空卡比兽

- 注意，前文所说的先遇到和后遇到是指在一次路径中先后遇到，而在实际处理时，由于行动逻辑有限制，可能存在搜索中程序先遇到某个点，这不意味着是在一次路径中先遇到这个点，因此根据自己的具体做法需要对上述说法进行一定的修正。
- 例如，我的做法中只进行了一次深搜，使用了三个 bool 值进行标记，遇到 1 则标记 f1，回溯离开 1 后取消 f1 的标记，遇到 2 只有在 f1 或 f3 有标记时才说明能成功离开，否则标记 f2，遇到成环（遇到连通块标记）在 f1 和 f2 都被标记时说明成功离开，否则如果有 f1 标记则标记 f3。通过这三个标记来进行上述的先遇到哪一个的判断。

万恶的柚子厨

解法一：

- 本题可以看成有 n 个点，每次操作等概率地选择一个点，并且选择之后无法再选择该点以及该点以前的点（相当于删除该点以及该点之前的所有点）。
- 期望具有可加性，题目要求删除所有点时的期望操作次数也就是求每个点被删除的期望之和。
- 所以我们只要计算每个点被删除的期望并求和就会得到最终答案。

万恶的柚子厨

- 对于其中的某个点 i 来说，该点被删除只有两种情况，第一种是选中该点之后的点删除，第二种是选中自己被删除。
- 根据本题的期望定义，每个点对答案的贡献只有 1 或 0 两种情况，当且仅当选中 i 点并删除 i 点会对答案产生权值为 1 的贡献其中概率为 $\frac{1}{(n-i+1)}$。
- 综上我们可以知道 i 点对最终答案的贡献是 $\frac{1}{(n-i+1)}$，最终我们的答案是项数为 n 的调和级数。复杂度为 $O(n)$。

万恶的柚子厨

解法二：

- 观察到期望的可加性，我们可以从动态规划的角度入手解决这个问题，定义数组 $f[i]$ 为当序列长度为 i 时期望操作数。
- 我们最终要删除 i 点，那么在删除 i 点之前我们可以删除 i 点前的任意一个点，因此 $f[i]$ 是由 $f[1], f[2], \cdots, f[i-1]$ 转移而来。
- 删除点 i 会对答案产生权值为 1 的贡献，考虑到我们可以直接删除 i 而不删除 i 前面的任意一个点，总共会有 i 种情况，即每种情况转移而来的概率为 $\frac{1}{i}$。

万恶的柚子厨

- 为了方便统计前 $i-1$ 个点总共的期望，我们记前缀 pre 为前 $i-1$ 个点的期望总和。
- 综上，有转移方程 $f[i]=\frac{pre+i}{i}$。
- 最后输出 $f[n]$ 即可，复杂度为 $O(n)$。